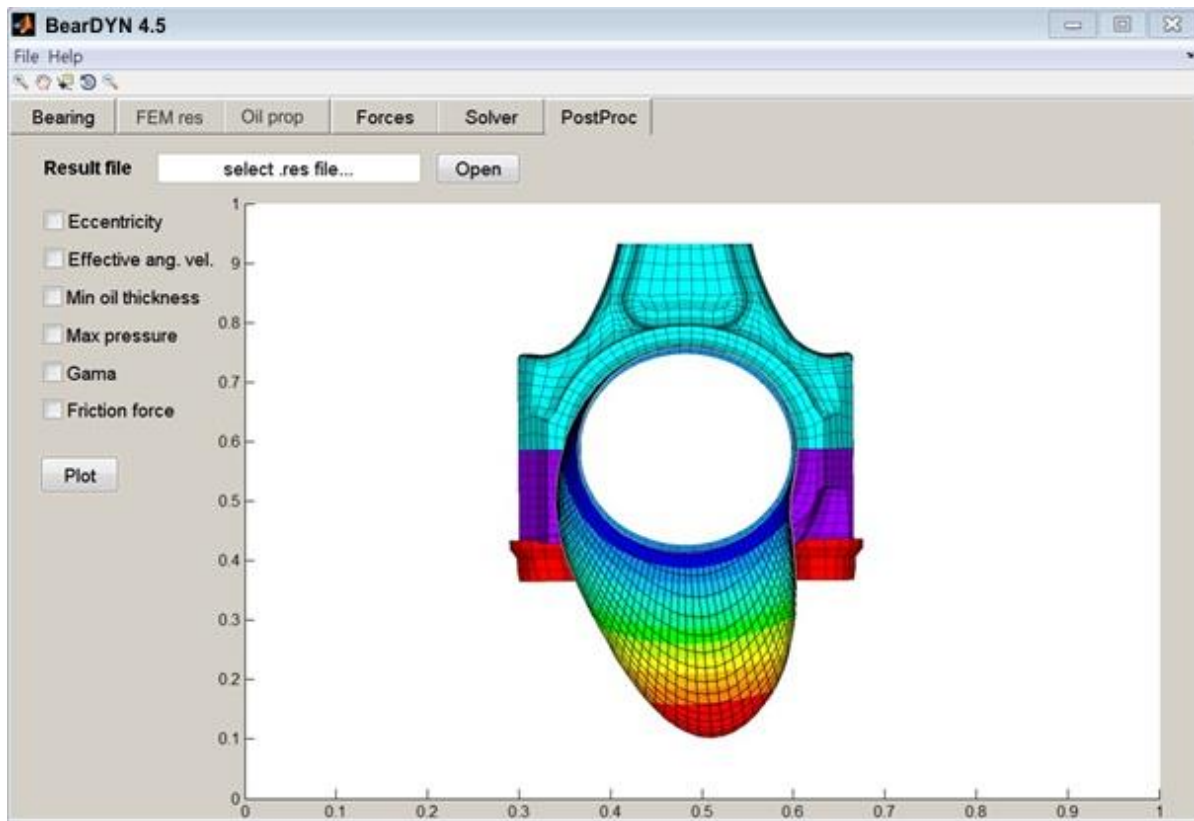


Název software

BearDyn 4.5



Obrázek 1 Postprocessor software BearDYN

Autoři

doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.

Datum předání

1. 3. 2016

Interní označení

BearDyn 4.5

Popis anglicky

BearDyn in version 4.5 is a software tool for solving problems of dynamics and thermo-elastic-hydrodynamic plain bearings. Inputs are the properties of the oil, the reaction force in the sliding bearing, the relative angular velocity and the stiffness matrix of the pelvis and the pin. To solve the balance pin is used modified Newton method with an estimated Jacobian based Boyden method. The pressure in the oil layer is based on solving Reynolds equation by using the finite difference method with consideration of the influence of pressure, temperature and shear stresses on the viscosity and density of oil, the elastic deformation of the pin and pans, by unevenness on the oil flow and contact bumps. The software includes a preprocessor, solver and postprocessor. The solution of the kinematic quantities and deformation structures and tribological parameters describing mixed lubrication.

Klíčová slova v originále

EHD, mixed lubrication, Newton method, slide bearing, reaction forces

Popis česky

BearDyn ve verzi 4.5 je softwarový nástroj pro řešení problémů dynamiky a termo-elasto-hydrodynamiky kluzných ložisek. Vstupem jsou vlastnosti oleje, reakční síly v kluzném ložisku, relativní úhlová rychlost a matice tuhosti pánve a čepu. Pro řešení rovnováhy čepu je použita modifikovaná Newtonova metoda s odhadem Jacobiánu na základě Boydenovy metody. Tlak v olejové vrstvě vychází z řešení Reynoldsovi rovnice pomocí metody konečných diferencí s uvažováním vlivu tlaku, teploty a smykových napětí na viskozitu a hustotu oleje, elastických deformací čepu a pánve, vlivu nerovností na proudění oleje a kontaktů nerovností. Software obsahuje preprocessor, řešič a postprocessor.

Výsledkem řešení jsou kinematické veličiny a deformace struktur a tribologické parametry popisující smíšené mazání.

Klíčová slova česky

TEHD, smíšené tření, Newtonova metoda, Newmarkova metoda, kluzné ložisko, reakční síly, viskozita

Parametry technické

Využitím nové verze software lze řešit pokročilé problémy tribologie kluzných ložisek spalovacích motorů a pomocí výsledků optimalizovat jejich parametry. Vhodným nastavením parametrů kluzných ložisek lze dosáhnout nižších třecích ztrát, které se projeví nižší spotřebou motoru a tím lepší ekonomikou provozu.

Parametry ekonomické

Program je napsán v prostředí Matlab včetně interaktivního uživatelského prostředí. Software lze šířit zdarma a používat k nekomerčním účelům. Uživatel však není oprávněn software či jeho součásti jakkoliv měnit. Pro komerční využití je třeba se obrátit na autora:

doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.

novotny.pa@fme.vutbr.cz

tel: +42 054 1142 271

Využití mimo autorský kolektiv
ČVUT v Praze, Honeywell

Kontaktní osoba
Doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.

Telefon
+420541142272

Místnost
A1/616

Prohlášení

Prohlašuji, že popsáný výsledek naplňuje definici uvedenou v Metodice hodnocení výsledku výzkumu, experimentálního vývoje a inovací pro rok 2010, a že jsem si vědom důsledku plynoucích z porušení § 14 zákona č. 130/2002 Sb. (ve znění platném od 1. července 2009). Prohlašuji rovněž, že na požádání předložím technickou dokumentaci výsledku.


.....
Doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.



**Institute of
Automotive Engineering**

BearDYN 4.5 – teoretické předpoklady a numerické řešení

Pavel Novotný

- Řešení rovnováhy čepu jako soustavy nelineárních rovnic
- Analytické řešení Reynoldsovy rovnice (RE)
- Iterační FDM řešení RE
- Iterační řešení RE zachovávající hmotnost (Mass Conservative)
- Vliv elastických deformací
- HD řešení s uvažováním faktorů toku

Teorie BearDYN 4.5

Řešení rovnováhy sil



- Uvažuje se rovnováha vnějších a vnitřních sil na působících na čep relativně k pouzdru.
- Vnitřní síly jsou síly v olejové vrstvě.
- Setrvačné, pružné a tlumicí síly jsou zahrnuty ve vnějších silách stanovené separátním řešením.

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_O = 0$$

■ Výchozí nelineární funkce

$$\mathbf{f}(x, y, z, \vartheta, \zeta, \alpha, t) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_\vartheta \\ f_\zeta \\ f_\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_O = \mathbf{0}$$

■ Nové souřadnice – Newton Raphsonův algoritmus

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \\ \vartheta_{k+1} \\ \zeta_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \omega_{EQ} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}_k$$



Jacobiho matice

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_g}{\partial x} & \frac{\partial f_\zeta}{\partial x} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & & & & \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} & & & & & \\ \frac{\partial f_x}{\partial g} & & & & & \\ \frac{\partial f_x}{\partial \zeta} & & & & & \\ \frac{\partial f_x}{\partial \alpha} & & & & & \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

Integrace vnitřních sil v souřadnicovém systému pánve

Normálový tlak/síla **Smykové napětí / třecí síla**

$$F_x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{Ci,j} dA \cos(\varphi_{Ci}) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{Ci,j} dA \sin(\varphi_{Ci})$$

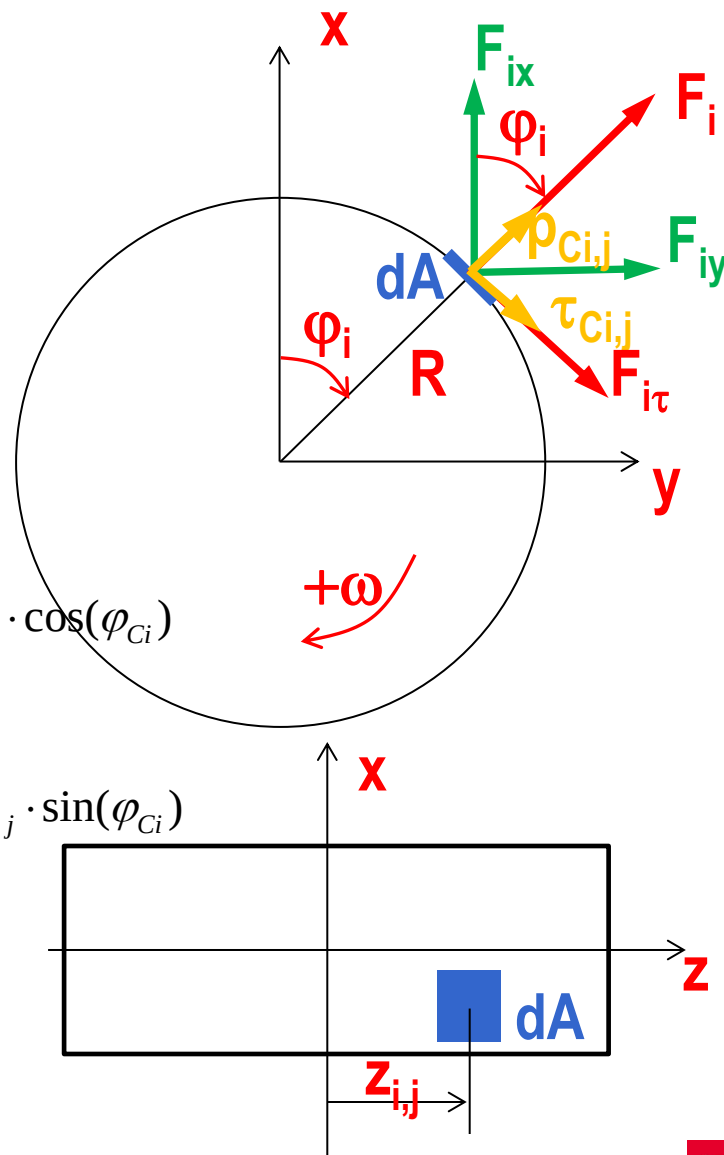
$$F_y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{Ci,j} dA \sin(\varphi_{Ci}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{Ci,j} dA \cos(\varphi_{Ci})$$

$$F_z = 0$$

$$M_x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{Ci,j} \cdot dA \cdot z_{Ci,j} \cdot \sin(\varphi_{Ci}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{Ci,j} \cdot dA \cdot z_{Ci,j} \cdot \cos(\varphi_{Ci})$$

$$M_y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{Ci,j} \cdot dA \cdot z_{Ci,j} \cdot \cos(\varphi_{Ci}) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{Ci,j} \cdot dA \cdot z_{Ci,j} \cdot \sin(\varphi_{Ci})$$

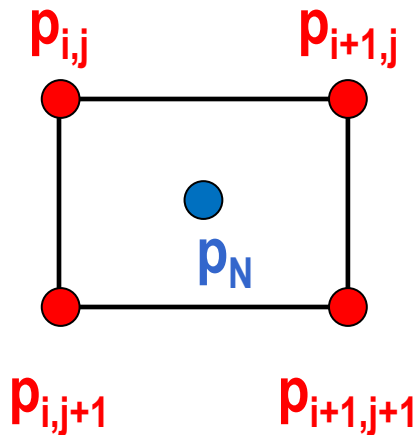
$$M_z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{Ci,j} R dA$$



Integrace veličiny – lichoběžníkové pravidlo

$$p_N = \frac{dA}{4} (p_{i,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j+1} + p_{i+1,j+1})$$

$$\tau_N = \frac{dA}{4} (\tau_{i,j} + \tau_{i+1,j} + \tau_{i,j+1} + \tau_{i+1,j+1})$$



Teorie BearDYN v. 4.5

Časová integrace souřadnic

Kinematické veličiny – přehled

■ Posuv čepu

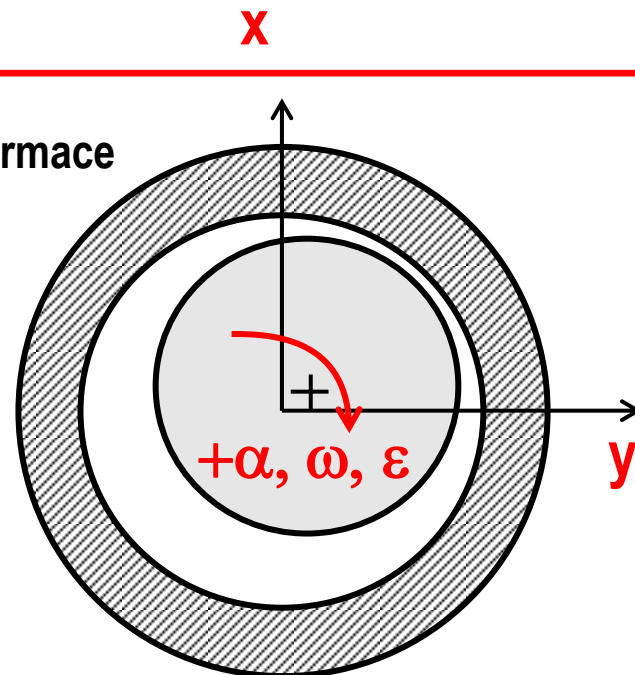
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ g \\ \zeta \\ \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{X}$$

Rychlost čepu

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_g \\ \omega_\zeta \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{V}$$

Zrychlení deformace

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ \varepsilon_g \\ \varepsilon_\zeta \\ \varepsilon_\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

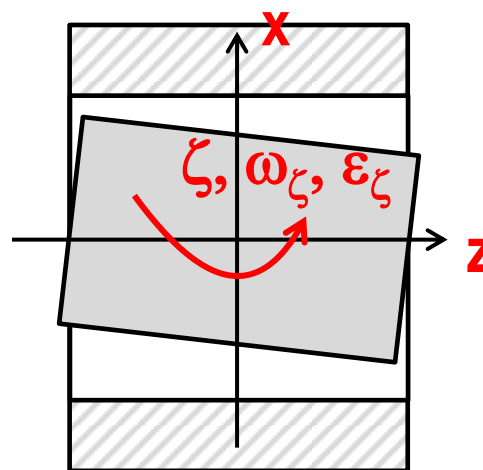


■ Zadané veličiny (deformační posuv):

■ α – úhel natočení čepu v ose rotace vzhledem k pánvi

■ ω – úhlová rychlost čepu v ose čepu vzhledem k pánvi

■ ε_α – úhlové zrychlení čepu v ose čepu vzhledem k pánvi



■ Posuv čepu v čase $t + \Delta t$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \\ \vartheta_{k+1} \\ \zeta_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}_{k+1}$$

■ Rychlost čepu

$$\mathbf{V}_{k+1} = \dot{\mathbf{X}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{X}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_k$$

$$\begin{aligned} \beta &= 0.25 \\ \gamma &= 0.5 \end{aligned}$$

■ Zrychlení deformace

$$\mathbf{A}_{k+1} = \ddot{\mathbf{X}}_{k+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_k$$

Tečná a normálová rychlost mezery

- Tečná rychlost – změna olejové mezery v tangenciálním směru (Couettův člen RE)

$$\frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x}$$

$$U = \omega R - v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi$$

- Normálová rychlost – změna olejové mezery v radiálním směru (transientní člen RE)

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \dot{\rho} h + \rho \dot{h} = \dot{\rho} h + \rho U_n$$

$$U_n = \dot{h} = -v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi$$

- Normálová rychlost – vliv naklopení

$$U_n = \dot{h} = -v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi - z \omega_x \sin \varphi - z \omega_y \cos \varphi$$



Teorie BearDYN 4.5

Analytické řešení hydrodynamických sil
Řešič: SOLH10

- Separátní řešení pro tangenciální a radiální pohyb čepu vzhledem k pánvi.
- Hydrodynamický tlak při tangenciálním pohybu

$$p_T = \frac{3U\eta\varepsilon \sin \varphi}{Rc^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \left(\frac{B^2}{4} - z^2 \right)$$

- $p=0$ pro $\varphi=\pi$ až $\varphi=2\pi$
- Kavitace: Half-Sommerfeld

- Hydrodynamický tlak pro radiální pohyb

$$p_R = \frac{6\eta}{c^3 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \frac{\partial h}{\partial t} \left(z^2 - \frac{B^2}{4} \right) = \frac{6\eta}{c^3 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \left(\frac{\partial h}{\partial t} (c + e \cos \varphi) \right) \left(z^2 - \frac{B^2}{4} \right) =$$

$$p_R = \frac{\cos \varphi 6\eta \dot{e}}{c^3 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3} \left(z^2 - \frac{B^2}{4} \right)$$

- Zdroj: Stachowial Bachelor. Engineering Tribology

■ Efektivní úhlová rychlost – tangenciální pohyb čepu

$$S = \frac{x}{e + 10^{-9}}$$

$$C = \frac{y}{e + 10^{-9}}$$

$$\dot{\delta} = \frac{v_x C - v_y S}{e + 10^{-9}}$$

$$\omega_e = \omega - 2\dot{\delta}$$

$$U = \omega_e R$$

■ Radiální rychlost v nejmenší mezeře

$$\dot{e} = v_x \cos \delta + v_y \sin \delta$$

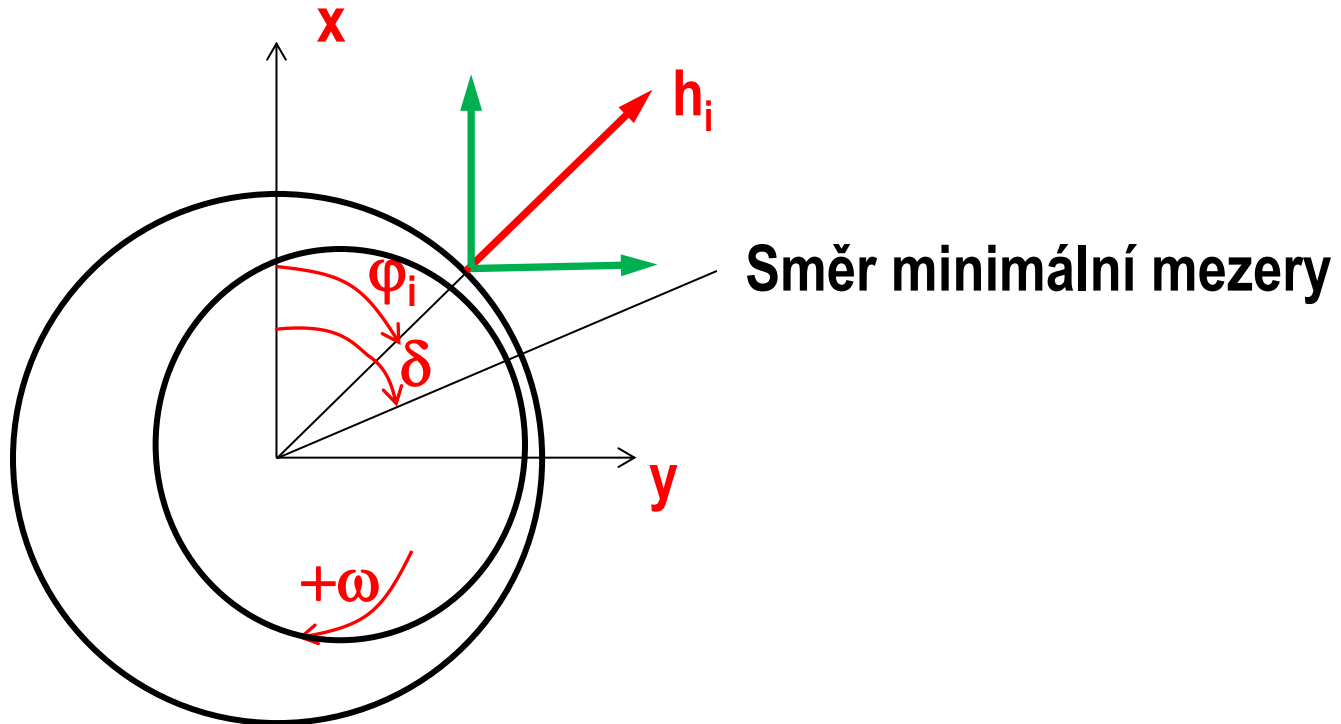


Teorie BearDYN v. 4.5

Iterační řešení RE – hydrodynamika
Řešič: SOLH2x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \right) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \left(\frac{W_1 + W_2}{2} \right) \frac{\partial(\rho h)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0$$

$$h = 1 + [e \cos(\varphi - \delta + \pi) + B \sin(\varphi - \delta + \pi) \tan(\mathcal{G}) + B \cos(\varphi - \delta + \pi) \tan(\zeta)]$$



Úprava Reynoldsovy rovnice

■ Reynoldsova rovnice – obecné HD řešení

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0$$

■ Parametr c – ložisková vůle / 2

$$c = R - r = cl / 2$$

■ Bezrozměrné veličiny

$$H = \frac{h}{R-r} = \frac{h}{c} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad \varphi = \frac{x}{R} \quad Z = \frac{z}{B} \quad \xi = \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \quad \nu = \frac{B}{R} = \frac{2B}{D}$$

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \bar{U}_n = \frac{U_n}{c} = \dot{H} \quad \bar{U} = \frac{U}{2R} \quad H = \frac{h}{R-r} = \frac{h}{c} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \\ \varphi = \frac{x}{R} \quad Z = \frac{z}{B} \quad \nu = \frac{B}{R} = \frac{2B}{D} \\ P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \bar{U}_n = \frac{U_n}{c} = \dot{H} \quad \bar{U} = \frac{U}{2R} \\ \xi = \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}}$$



Úprava Reynoldsovy rovnice

■ Klínový člen

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \xi = \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = c\rho_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = c\rho_0 \frac{R^2}{B^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = c\rho_0 \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Z} \right)$$

■ Couettův člen

$$\frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} = c\rho_0 \frac{U}{2R} \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial \varphi} = c\rho_0 \bar{U} \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial \varphi}$$

■ Transientní člen

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \dot{\rho}h + \rho\dot{h} = \dot{\rho}h + \rho U_n = \dot{\rho}h + \rho c \bar{U}_n = c\rho_0 (\dot{\bar{\rho}}H + \bar{\rho}\dot{H})$$

Bezrozměrný tvar Reynoldsovy rovnice

■ Reynoldsova rovnice – bezrozměrný tvar

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \bar{U} \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial \varphi} - (\dot{\bar{\rho}}H + \bar{\rho}\dot{H}) = 0$$

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \xi = \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}}$$

■ Reynoldsova rovnice – bezrozměrný tvar, konstantní viskozita a hustota

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \bar{U} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \dot{H} = 0$$

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \xi = H^3$$

■ Smykové napětí v olejové vrstvě

$$\tau = \pm \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U\mu}{h}$$

■ Třecí síla v olejové vrstvě

$$F_t = \int_A \tau dA$$

Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice

■ Metoda konečných diferencí (FDM)

■ Diskretizace Poisseuilleova členu (tlakového členu)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) \right)_{i,j} \cong \frac{\left(\xi \frac{\partial P}{\partial \phi} \right)_{i+1/2,j} - \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \phi} \right)_{i-1/2,j}}{h_\phi}$$

■ Vnitřní derivace

$$\left(\xi \frac{\partial P}{\partial \phi} \right)_{i+1/2,j} \cong \xi_{i+1/2,j} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h_\phi}$$

■ Kombinace

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) \right)_{i,j} \cong \frac{\xi_{i+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j} P_{i-1,j}}{h_\phi^2}$$



Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice

■ Vyjádření x

$$\xi_{i+1/2,j} = \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}}{2}$$

■ Vyjádření Couettova členu (klínového členu)

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial \varphi} \Big|_{i,j} \cong \bar{U}_{i,j} \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j} - 2.0 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{i-1,j} + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{i-2,j}}{h_{\varphi}}$$

Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice

■ Vyjádření nestacionárního členu

$$\left(\dot{\rho}H + \bar{\rho}\dot{H} \right) |_{i,j} = \dot{\rho}_{i,j}H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j}$$

■ Rychlost olejové mezery – Newmark

$$\dot{\mathbf{H}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{H}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{H}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{H}}_k$$

■ Zrychlení olejové mezery – Newmark

$$\ddot{\mathbf{H}}_{k+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{H}_k) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{H}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{H}}_k$$

■ Rychlost hustoty – Newmark

$$\dot{\bar{\rho}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\bar{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\bar{\rho}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\bar{\rho}}_k$$

■ Zrychlení hustoty – Newmark

$$\ddot{\bar{\rho}}_{k+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\bar{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_k) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\bar{\rho}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\rho}}_k$$



Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice

■ Dosazení do Reynoldsovy rovnice

$$\begin{aligned} L(P_{i,j}) = & \frac{\xi_{i+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j} P_{i-1,j}}{h_\varphi^2} \\ & + \frac{1}{\nu^2} \frac{\xi_{i,j+1/2} P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2}) P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2} P_{i,j-1}}{h_z^2} \\ & - \bar{U}_{i,j} \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j} - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{i-1,j} + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{i-2,j}}{h_\varphi} \\ & - \dot{\bar{\rho}}_{i,j} H_{i,j} - \bar{\rho}_{i,j} \dot{H}_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

■ **Konstanty**

$$a_1 = \frac{1}{h_\varphi^2} \quad a_2 = \frac{1}{(\nu h_z)^2} \quad a_3 = \frac{1}{2R h_\varphi} \quad a_4 = \frac{1}{h_t}$$

■ V SOLVERu označeno $a_1=rhx2$, $a_2=rhz2$, $a_3=rhx1$, $a_4=rht1$

■ Pozn. člen a_3 zahrnuje rovněž R , tedy v RE lze použít U .



Diskrétní rovnice – řešič SOLH20

■ Výpočet tlaku v bodě i, j

$$+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j})$$

$$+a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1})$$

$$-a_3U_{i,j}(1.5H_{i,j} - 2H_{i-1,j} + 0.5H_{i-2,j})$$

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{\text{SOR}} \frac{r_{i,j}}{J} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{\text{SOR}} \frac{-\dot{H}_{i,j}}{-a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}$$

■ ω_{SOR} underrelaxation koeficient (metoda SOR)

■ Kavítace $P_{i,j} < P_c$

■

■ Residuum v bodě i, j

$$r_{i,j} =$$

$$+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) + a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1})$$

$$-a_3U_{i,j}(1.5H_{i,j} - H_{i-1,j} + 0.5H_{i-2,j}) - \dot{H}_{i,j}$$

■ ~~Jacobián v bodě i, j~~ $-a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})$

■ Výpočet tlaku v bodě i,j

$$+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) \\ +a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) \\ -a_3U_{i,j}\bar{\rho}_{i,j}(1.5H_{i,j} - H_{i-1,j} + 0.5H_{i-2,j})$$

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{SOR} \frac{r_{i,j}}{J} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{SOR} \frac{-\bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j}}{-a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}$$

■ Řešení probíhá pro celý sloupec najednou.

■ Kavítace $P_{i,j} < P_c$

■ Residuum v bodě i,j

$$+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) + a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) \\ -a_3U_{i,j}\bar{\rho}_{i,j}(1.5H_{i,j} - 2H_{i-1,j} + 0.5H_{i-2,j}) - \bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j}$$

■ Jacobián v bodě i,j

$$J_{i,j} = -a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})$$

■ Výpočet tlaku v bodě i,j

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{SOR} \frac{r_{i,j}}{J} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{SOR} \frac{\begin{aligned} &+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) \\ &+a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) \\ &-a_3U_{i,j}(1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j}) \\ &-(\dot{\bar{\rho}}_{i,j}H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j}) \end{aligned}}{-a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}$$

■ Kavítace

$$P_{i,j} < P_c$$

■ Residuum v bodě i,j

$$\begin{aligned} r_{i,j} = &+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) + a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) \\ &-a_3U_{i,j}(1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j}) - (\dot{\bar{\rho}}_{i,j}H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j}) \end{aligned}$$

■ Jacobián v bodě i,j

$$J_{i,j} = -a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})$$

■ Výpočet tlaku v bodě i,j

$$\begin{aligned}
 &+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) \\
 &+a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) \\
 &-a_3U_{i,j}(1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j})
 \end{aligned}$$

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{GS} \frac{r_{i,j}}{J} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{GS} \frac{-(\dot{\bar{\rho}}_{i,j}H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j})}{-a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}$$

■ Řešení probíhá pro celý sloupec najednou.

■ Kavítace $P_{i,j} < P_c$

■ Residuum v bodě i,j

$$\begin{aligned}
 &+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) + a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) \\
 &-a_3U_{i,j}(1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j}) - (\dot{\bar{\rho}}_{i,j}H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j}\dot{H}_{i,j})
 \end{aligned}$$

■ Jacobián v bodě i,j

$$J_{i,j} = -a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})$$

Porovnání řešičů

Veličina	SOLH20	SOLH21	SOLH22	SOLH23
$\dot{\bar{\eta}}_{i,j} = 0$	ANO	NE	NE	NE
$\dot{\bar{\rho}}_{i,j} = 0$	ANO	NE	NE	NE
$\frac{\partial \bar{\rho}_{i,j}}{\partial x,z} = 0$	ANO	NE	NE	ANO
$\bar{\eta} = f(p)$	NE	ANO	ANO	ANO
$\bar{\rho} = f(p)$	NE	ANO	ANO	ANO



BearDYN 4.5

EHD řešení

Řešič: SOLEH3x

Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice – vliv elastických deformací

■ Vyjádření nestacionárního členu

$$\frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} H)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^R + \mathbf{H}^E$$

$\mathbf{H}_R$ je mezera pro tuhá tělesa

$\mathbf{H}_E$ je elastická deformace mezery

■ Rychlost změny olejové mezery a hustoty

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\bar{\rho}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} - \bar{\rho}_k \mathbf{H}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_k \mathbf{H}_k) - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\rho}_k \mathbf{H}_k) \\ &= g_1 \left[\bar{\rho}_{k+1} (\mathbf{H}_{k+1}^R + \mathbf{H}_{k+1}^E) - \bar{\rho}_k (\mathbf{H}_k^R + \mathbf{H}_k^E) \right] - g_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_k (\mathbf{H}_k^R + \mathbf{H}_k^E)) \right] - g_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\rho}_k (\mathbf{H}_k^R + \mathbf{H}_k^E)) \right] \\ &= +g_1 \left[\bar{\rho}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^R - \bar{\rho}_k \mathbf{H}_k^R \right] - g_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_k \mathbf{H}_k^R) \right] - g_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\rho}_k \mathbf{H}_k^R) \right] \\ &\quad + g_1 \left[\bar{\rho}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^E - \bar{\rho}_k \mathbf{H}_k^E \right] - g_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_k \mathbf{H}_k^E) \right] - g_3 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\rho}_k \mathbf{H}_k^E) \right] \end{aligned}$$

$$g_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad g_2 = \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \quad g_3 = \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t$$

Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice – vliv elastických deformací

■ Vyjádření nestacionárního členu

$$\frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial t} \cong H \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial H}{\partial t} = H \dot{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \dot{H}$$

$$H = H_r + H_e$$

H_r je mezera pro tuhá tělesa
 H_e je elastická deformace mezery

■ Rychlost olejové mezery

$$\dot{\mathbf{H}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{H}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{H}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{H}}_k$$

■ Zrychlení olejové mezery

$$\ddot{\mathbf{H}}_{k+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{H}_k) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{H}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{H}}_k$$



Elastické deformace – NEWMARK

■ Elastická deformace struktury

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_{k+1}^E + \mathbf{B}\dot{\mathbf{h}}_{k+1}^E + \mathbf{K}\mathbf{h}_{k+1}^E = \mathbf{F}_{k+1}$$

$\mathbf{K}$ je matice tuhosti

$\mathbf{M}$ je matice hmotnosti

$\mathbf{B}$ je matice tlumení

Elastická deformace v
dalším iteračním kroku

$$\mathbf{h}_{k+1}^e \equiv \mathbf{h}_{k+1}$$

■ Rychlost deformace

$$\dot{\mathbf{h}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{h}_{k+1} - \mathbf{h}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{h}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{h}}_k$$

■ Zrychlení deformace

$$\ddot{\mathbf{h}}_{k+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{h}_{k+1} - \mathbf{h}_k) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{h}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{h}}_k$$

■ Dosazení do pohybové rovnice

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{B} + \mathbf{K}\right)\mathbf{h}_{k+1} =$$

$$\mathbf{F}_{k+1} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{h}_k + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{h}}_k + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{h}}_k\right] + \mathbf{B}\left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{h}_k + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{h}}_k + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{h}}_k\right]$$

■ Úprava

$$\mathbf{h}_{k+1} = \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{B} + \mathbf{K}\right)^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$$



Elastické deformace – HHT

■ Elastická deformace struktury

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_{k+1}^e + (1-\psi)\mathbf{B}\dot{\mathbf{h}}_{k+1}^e + \psi\mathbf{B}\dot{\mathbf{h}}_k^e + (1-\psi)\mathbf{K}\mathbf{h}_{k+1}^e + \psi\mathbf{K}\mathbf{h}_k^e = \mathbf{F}_{k+1-\psi}$$

■ Rychlost deformace

$$\dot{\mathbf{h}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{h}_{k+1} - \mathbf{h}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{h}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{h}}_k$$

K je matice tuhosti

M je matice hmotnosti

B je matice tlumení

Elastická deformace v
dalším iteračním kroku

$$\mathbf{h}_{k+1}^e \equiv \mathbf{h}_{k+1}$$

■ Zrychlení deformace

$$\ddot{\mathbf{h}}_{k+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{h}_{k+1} - \mathbf{h}_k) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{h}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{h}}_k$$

■ Dosazení do pohybové rovnice

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{B} + \mathbf{K}\right)\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{h}_k + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{h}}_k + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{h}}_k\right] + \mathbf{B}\left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{h}_k + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{h}}_k + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{h}}_k\right]$$

■ Úprava

$$\mathbf{h}_{k+1} = \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{B} + \mathbf{K}\right)^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$$



■ Elastická deformace v SI jednotkách funkcí sil [N]

$$\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$$

Bezrozměrný tlak

$$\mathbf{P} = \frac{c^2}{12R^2\eta_0} \mathbf{p} = \frac{1}{c_{pp}} \mathbf{p}$$

■ Komplexní zatížení

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{F}_{k+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{h}_k + \frac{1}{\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{h}}_k + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{h}}_k \right] + \mathbf{B} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{h}_k + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{h}}_k + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{h}}_k \right] \\ &= A_0 \mathbf{p} + \mathbf{M}[\dots] + \mathbf{B}[\dots] = A_0 \frac{12R^2\eta_0}{c^2} \mathbf{P} + \mathbf{M}[\dots] + \mathbf{B}[\dots] = \frac{12A_0R^2\eta_0}{c^2} \mathbf{P} + \mathbf{M}[\dots] + \mathbf{B}[\dots] \end{aligned}$$

■ Komplexní matice poddajnosti

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{B} + \mathbf{K} \right)^{-1}$$

A_0 je jednotková plocha elementu

■ Relativní elastická deformace funkcí bezrozměrných tlaků [-]

$$\mathbf{H}_{k+1} = \frac{\mathbf{h}_{k+1}}{c} = \frac{1}{c} \mathbf{A}\mathbf{Q}$$



■ Relativní elastická deformace

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{k+1} &= \frac{\mathbf{h}_{k+1}}{c} = \frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{A} \left(\frac{12 A_0 R^2 \eta_0}{c^3} \mathbf{P} + \frac{1}{c} \mathbf{M} [..] + \frac{1}{c} \mathbf{B} [..] \right) \\&= \mathbf{A} \left(c_{pa} \mathbf{P} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{H}_k + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{H}}_k + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{H}}_k \right] + \mathbf{B} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{H}_k + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{H}}_k + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{H}}_k \right] \right) \\&= \mathbf{A} \mathbf{Q}_R = \frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{Q}\end{aligned}$$

■ Relativní zatížení

$$\mathbf{Q}_R = \left(c_{pa} \mathbf{P} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{H}_k + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{H}}_k + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{H}}_k \right] + \mathbf{B} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{H}_k + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{H}}_k + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{H}}_k \right] \right)$$

■ Relativní rychlost elastické deformace

$$\dot{\mathbf{H}}_{k+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{H}_k) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{H}}_k - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{H}}_k$$

■ Relativní zrychlení elastické deformace

$$\ddot{\mathbf{H}}_{k+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{H}_k) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{H}}_k - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{H}}_k$$



- Konstanta pro výpočet skutečného tlaku z bezrozměrného

$$\mathbf{p} = c_{pp} \mathbf{P}$$

$$c_{pp} = \frac{12R^2\eta_0}{c^2}$$

- Konstanta pro výpočet relativní elastické deformace z bezrozměrného tlaku

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_R = \mathbf{A} \left(c_{pa} \mathbf{P} + \mathbf{M} \left[f(\mathbf{H}_k, \dot{\mathbf{H}}_k, \ddot{\mathbf{H}}_n) \right] + \mathbf{B} \left[f(\mathbf{H}_k, \dot{\mathbf{H}}_k, \ddot{\mathbf{H}}_k) \right] \right)$$

$$c_{pa} = \frac{12R^2\eta_0}{c^3} \left(\frac{\pi DB}{(m-1)(n-1)} \right)$$

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{B} + \mathbf{K} \right)^{-1}$$

A je komplexní matice poddajnosti

Prvek matice poddajnosti

- Relativní deformace z relativní komplexní matice poddajnosti

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H} = \mathbf{A} \left(c_{pa} \mathbf{P} + \mathbf{M} \left[f(\mathbf{H}_k, \dot{\mathbf{H}}_k, \ddot{\mathbf{H}}_k) \right] + \mathbf{B} \left[f(\mathbf{H}_k, \dot{\mathbf{H}}_k, \ddot{\mathbf{H}}_k) \right] \right)$$

- Parciální derivace relativní elastické deformace dle bezrozměrného tlaku

$$\frac{\partial H_{i,j}}{\partial P_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial P_{i,j}} \left[\mathbf{A} \left(c_{pa} \mathbf{P} + \mathbf{M} [\dots] + \mathbf{B} [\dots] \right) \right]_{i,j} \doteq c_{pa} \mathbf{A}_{i,j} = C_{\beta}$$

- Poměrný prvek matice poddajnosti – rozměr matice $\mathbf{A}$ je $(m.n) \times (m.n)$

$$C_{\beta} = C_{i+m(j-1), i+m(j-1)-\beta} \quad \beta \text{ je vzdálenost od diagonály}$$

- Veličiny nutné pro SOLVER

- $c_{pa}, c_{pp}, \mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{B}, C_{\beta}$



$$H_{i,j} = c_{pa} \sum_{i'=1}^m \sum_{j'=1}^n A_{i,i',j,j'} P_{i',j'}$$



Hydrodynamické řešení nelineární úlohy – nový tlak

■ Gauss Seidel

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{GS} \frac{r_{i,j}}{\frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j}}}$$

■ Jacobi

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{JC} \frac{r_{i,j}}{\frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j}} - 0.25 \left(\frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i+1,j}} + \frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i-1,j}} + \frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j+1}} + \frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j-1}} \right)}$$

■ Relaxace v obou případech probíhá pro celý sloupec najednou!

■ Kavítace

$$P_{i,j} > 0$$

■ Funkce L

$$L(P) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \bar{U} \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial \varphi} - H \dot{\bar{\rho}} - \bar{\rho} \dot{H}$$

■ Výpočet nového tlaku

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{GS} \frac{r_{i,j}}{J_{i,j}}$$

■ Residuum shodné pro G-S a Jacobi

$$\begin{aligned} r_{i,j} = & \\ & + a_1 (\xi_{i+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j} P_{i-1,j}) \\ & + a_2 (\xi_{i,j+1/2} P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2}) P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2} P_{i,j-1}) \\ & - a_3 U_{t_{i,j}} (1,5 \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j} - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{i-1,j} + 0,5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{i-2,j}) \\ & - (\dot{\bar{\rho}}_{i,j} H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j} \dot{H}_{i,j}) \end{aligned}$$

■ Funkce L

$$\begin{aligned}
 L_{i,j} = & \\
 & + \frac{\xi_{i+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j} P_{i-1,j}}{h_\varphi^2} \\
 & + \frac{1}{\nu^2} \frac{\xi_{i,j+1/2} P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2}) P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2} P_{i,j-1}}{h_z^2} \\
 & - \bar{U}_{i,j} \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j} - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{i-1,j} + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{i-2,j}}{h_\varphi} \\
 & - (\dot{\bar{\rho}}_{i,j} H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j} \dot{H}_{i,j})
 \end{aligned}$$

■ Jacobian dle G-S

$$\begin{aligned}
 J_{i,j} = \frac{\partial L_{i,j}}{\partial P_{i,j}} = & - \frac{(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})}{h_\varphi^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}{h_z^2} \\
 & - \bar{U}_{i,j} \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j,k} C_0 - 2 \bar{\rho}_{i-1,j,k} C_1 + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j,k} C_2}{h_\varphi} - \dot{\bar{\rho}}_{i,j,k} C_0 - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \bar{\rho}_{i,j,k} C_0
 \end{aligned}$$

■ Funkce L

$$L_{i,j} =$$

$$+ \frac{\xi_{i+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j} P_{i-1,j}}{h_\varphi^2} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\xi_{i,j+1/2} P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2}) P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2} P_{i,j-1}}{h_z^2}$$

$$- \bar{U}_{i,j} \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j} - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{i-1,j} + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{i-2,j}}{h_\varphi} - (\dot{\bar{\rho}}_{i,j} H_{i,j} + \bar{\rho}_{i,j} \dot{H}_{i,j})$$

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \frac{r_{i,j}}{\frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j}} - 0.25 \left(\frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i+1,j}} + \frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i-1,j}} + \frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j+1}} + \frac{\partial L(P_{i,j})}{\partial P_{i,j-1}} \right)}$$

■ Dílčí derivace funkce L

$$\frac{\partial L_{i,j}}{\partial P_{i,j}} = - \frac{(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})}{h_x^2} - \frac{(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}{h_z^2} - \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} C_0 - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} C_1 + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} C_2}{h_x} - \dot{\bar{\rho}}_{i,j,t} C_0$$

$$\frac{\partial L_{i,j}}{\partial P_{i+1,j}} = \frac{\xi_{i+1/2,j}}{h_\varphi^2} - \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} C_1 - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} C_2 + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} C_3}{h_\varphi} - \dot{\bar{\rho}}_{i,j,t} C_0$$

$$\frac{\partial L_{i,j}}{\partial P_{i-1,j}} = \frac{\xi_{i-1/2,j}}{h_\varphi^2} - \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} C_1 - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} C_0 + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} C_1}{h_\varphi} - \dot{\bar{\rho}}_{i,j,t} C_0$$

$$\frac{\partial L_{i,j}}{\partial P_{i,j+1}} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\xi_{i,j+1/2}}{h_z^2} - \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} C_1 - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} C_1 + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} C_1}{h_\varphi} - \dot{\bar{\rho}}_{i,j,t} C_0$$

$$\frac{\partial L_{i,j}}{\partial P_{i,j-1}} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\xi_{i,j-1/2}}{h_z^2} - \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} C_1 - 2 \bar{\rho}_{i-1,j} C_1 + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} C_1}{h_\varphi} - \dot{\bar{\rho}}_{i,j,t} C_0$$

Jacobian

$$J_{i,j} = -1.25 \left(\frac{(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})}{h_\varphi^2} + \frac{1}{v^2} \frac{(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}{h_z^2} \right) - \left(\frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}(C_0 - 0.25(C_1 + C_1 + C_1 + C_1)) - 2.0\bar{\rho}_{i-1,j}(C_1 - 0.25(C_2 + C_0 + C_1 + C_1)) + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}(C_2 - 0.25(C_3 + C_1 + C_1 + C_1))}{h_\varphi} \right)$$

Zjednodušení zápisu

$$dC_0 = C_0 - C_1 \quad dC_1 = C_1 - 0.25(C_2 + C_0 + 2C_1) \quad dC_2 = C_2 - 0.25C_3 - 0.75C_1$$

Výsledný vztah pro Jacobian

$$J_{i,j} = -1.25 \left(\frac{(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})}{h_\varphi^2} + \frac{1}{v^2} \frac{(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}{h_z^2} \right) - \left(\frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}dC_0 - 2.0\bar{\rho}_{i-1,j}dC_1 + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}dC_2}{h_\varphi} \right)$$

BearDYN 4.5

HD řešení s uvažováním faktorů toku

Řešič: SOLFH5x

■ Reynoldsova rovnice v základním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0$$

■ Reynoldsova rovnice s faktory toku

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_z \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h_A)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h_A)}{\partial t} - \frac{U}{2} \sigma \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0$$

■ Průměrná tloušťka olejového filmu

$$h_A = h \quad \frac{h}{\sigma} \geq 3$$

$$h_A = \frac{3\sigma}{256} \left(35 + z \left(128 + z \left(140 + z^2 \left(-70 + z^2 \left(28 - 5z^2 \right) \right) \right) \right) \right) \quad \frac{h}{\sigma} < 3$$
$$z = \frac{h}{3\sigma}$$

Úprava Reynoldsovy rovnice

■ Reynoldsova rovnice – obecné HD řešení

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_z \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h_A)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h_A)}{\partial t} - \frac{U}{2} \sigma \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0$$

■ Parametr c – ložisková vůle / 2

$$c = R - r = cl / 2$$

■ Bezrozměrné veličiny

$$H = \frac{h}{R - r} = \frac{h}{c} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad \varphi = \frac{x}{R} \quad Z = \frac{z}{B} \quad \nu = \frac{B}{R} = \frac{2B}{D}$$

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \bar{U}_n = \frac{U_n}{c} = \dot{H} \quad \bar{U} = \frac{U}{2R} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{c\rho_0}$$

$$\xi_x = \phi_x \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \quad \xi_z = \phi_z \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}}$$

■ Průměrná tl. olejové vrstvy

$$\frac{h}{\sigma} \geq 3 \quad H_A = H$$

$$\frac{h}{\sigma} < 3 \quad H_A = \frac{h_A}{c} = \frac{3\sigma}{256c} \left(35 + z \left(128 + z \left(140 + z^2 \left(-70 + z^2 \left(28 - 5z^2 \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$z = \frac{h}{3\sigma}$$

Úprava Reynoldsovy rovnice

■ Klínový člen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = c\rho_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_z \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = c\rho_0 \frac{R^2}{B^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi_z \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = c\rho_0 \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi_z \frac{\partial P}{\partial Z} \right)$$

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0}$$

$$\xi_x = \frac{\phi_x \bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}}$$

$$\xi_z = \frac{\phi_z \bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}}$$

■ Couettův člen

$$\frac{U}{2} \frac{\partial(\rho h_T)}{\partial x} = c\rho_0 \frac{U}{2R} \frac{\partial(\bar{\rho} H_T)}{\partial \varphi} = c\rho_0 \bar{U} \frac{\partial(\bar{\rho} H_T)}{\partial \varphi}$$

■ Transientní člen

$$\frac{\partial(\rho h_T)}{\partial t} = \dot{\rho} h_T + \rho \dot{h}_T \doteq \dot{\rho} h_T + \rho U_n = \dot{\rho} h_T + \rho c \bar{U}_n = c\rho_0 (\dot{\bar{\rho}} H_T + \bar{\rho} \dot{H})$$

■ Člen faktoru toku

$$\frac{U}{2} \sigma \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = c\rho_0 \frac{U}{c\rho_0 2R} \sigma \frac{\partial \phi_s}{\partial \varphi} = c\rho_0 \bar{U} \bar{\sigma} \frac{\partial \phi_s}{\partial \varphi}$$

Bezrozměrný tvar Reynoldsovy rovnice

■ Reynoldsova rovnice – bezrozměrný tvar

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi_z \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \bar{U} \frac{\partial(\bar{\rho} H_T)}{\partial \varphi} - (\dot{\bar{\rho}} H_T + \bar{\rho} \dot{H}) - \bar{U} \bar{\sigma} \frac{\partial \phi_s}{\partial \varphi} = 0$$

$$P = \frac{pc^2}{12R^2\eta_0} \quad \xi_x = \phi_x \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \quad \xi_z = \phi_z \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{c\rho_0} \quad \bar{U} = \frac{U}{2R}$$

■ Reynoldsova rovnice – bezrozměrný tvar, konstantní viskozita a hustota (SOLWHD50)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\xi_z \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \bar{U} \frac{\partial H_T}{\partial \varphi} - \dot{H} - \bar{U} \bar{\sigma} \frac{\partial \phi_s}{\partial \varphi} = 0$$

$$\xi_x = \phi_x H^3 \quad \xi_z = \phi_z H^3$$

Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice

Metoda konečných diferencí (FDM)

Diskretizace Poisseuilleova členu (tlakového členu)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) \right)_{i,j} \cong \frac{\left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)_{i+1/2,j} - \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)_{i-1/2,j}}{h_\varphi}$$

Vnitřní derivace

$$\left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)_{i+1/2,j} \cong \xi_{xi+1/2,j} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h_\varphi}$$

Kombinace

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) \right)_{i,j} \cong \frac{\xi_{xi+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{xi+1/2,j} + \xi_{xi-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{xi-1/2,j} P_{i-1,j}}{h_\varphi^2} =$$

$$a_1 \left(\xi_{xi+1/2,j} P_{i+1,j} - (\xi_{xi+1/2,j} + \xi_{xi-1/2,j}) P_{i,j} + \xi_{xi-1/2,j} P_{i-1,j} \right)$$

$$a_1 = \frac{1}{h_\varphi^2}$$



Diskretizace jednotlivých členů Reynoldsovy rovnice

■ Vyjádření x

$$\xi_{xi+1/2,j} = \frac{\xi_{xi+1,j} - \xi_{xi,j}}{2} \quad \xi_{zi+1/2,j} = \frac{\xi_{zi+1,j} - \xi_{zi,j}}{2}$$

■ Vyjádření Couettova členu (klínového členu)

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{\rho} H_T}{\partial \varphi} \big|_{i,j} &\cong \bar{U}_{i,j} \frac{1.5 \bar{\rho}_{i,j} H_{Ti,j} - 2.0 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{Ti-1,j} + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{Ti-2,j}}{h_\varphi} \\ &= a_3 U_{i,j} (1.5 \bar{\rho}_{i,j} H_{Ti,j} - 2.0 \bar{\rho}_{i-1,j} H_{Ti-1,j} + 0.5 \bar{\rho}_{i-2,j} H_{Ti-2,j}) \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{1}{2Rh_\varphi}$$

■ Diskretizace členu faktoru toku

$$\bar{U} \bar{\sigma} \frac{\partial \phi_s}{\partial \varphi} \bigg|_{i,j} \cong \bar{U}_{i,j} \bar{\sigma}_{i,j} \frac{\phi_{si+1,j} - \phi_{si-1,j}}{2h_\varphi} = a_4 U_{i,j} \bar{\sigma}_{i,j} (\phi_{si+1,j} - \phi_{si-1,j})$$

$$a_4 = \frac{1}{4Rh_\varphi}$$

■ Výpočet tlaku v bodě i,j

$$P_{i,j} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{\text{SOR}} \frac{r_{i,j}}{J} = \tilde{P}_{i,j} - \omega_{\text{SOR}} \frac{+a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) + a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) - a_3U_{i,j}(1.5H_{Ti,j} - 2H_{Ti-1,j} + 0.5H_{Ti-2,j}) - \dot{H}_{i,j} - a_4U_{i,j}\bar{\sigma}_{i,j}(\phi_{si+1,j} - \phi_{si-1,j})}{-a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})}$$

■ ω_{SOR} underrelaxation koeficient (metoda SOR)

■ Kavítace $P_{i,j} < P_c$

■ Residuum v bodě i,j

$$r_{i,j} = +a_1(\xi_{i+1/2,j}P_{i+1,j} - (\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j})P_{i,j} + \xi_{i-1/2,j}P_{i-1,j}) + a_2(\xi_{i,j+1/2}P_{i,j+1} - (\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})P_{i,j} + \xi_{i,j-1/2}P_{i,j-1}) - a_3U_{i,j}(1.5H_{Ti,j} - H_{Ti-1,j} + 0.5H_{Ti-2,j}) - \dot{H}_{i,j} - a_4U_{i,j}\bar{\sigma}_{i,j}(\phi_{si+1,j} - \phi_{si-1,j})$$

■ Jacobián v bodě i,j

$$J_{i,j} = -a_1(\xi_{i+1/2,j} + \xi_{i-1/2,j}) - a_2(\xi_{i,j+1/2} + \xi_{i,j-1/2})$$



Kontakt

■ doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D
R&D project manager
Phone: +420 541 142 272
E-mail: novotny.pa@fme.vutbr.cz
Web: www.uadi.fme.vutbr.cz

Brno University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering
Institute of Automotive Engineering
NETME Centre
Technická 2
616 69 Brno
Czech Republic

